পাঠ সম্পর্কিত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়াদি

- **অনুপাত**

  একই এককে সমজাতীয় দুইটি রাশির পরিমাণের একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ তা একটি ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। এই ভগ্নাংশটিকে রাশি দুইটির অনুপাত বলে।

  ব্যাখ্যা : দুইটি রাশি p ও q এর অনুপাতকে $p : q = \frac{p}{q}$ লেখা হয়। p ও q রাশি দুইটি সমজাতীয় ও একই এককে হতে হবে। অনুপাতে p কে পূর্ব রাশি এবং q কে উত্তর রাশি বলা হয়।

- **সমানুপাত**

  যদি চারটি রাশি এরূপ হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে ঐ চারটি রাশি নিয়ে একটি সমানুপাত উৎপন্ন হয়। a, b, c, d এরূপ চারটি রাশি হলে আমরা লিখি, $a : b = c : d$

  ক্রমিক সমানুপাতী

  a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী বলতে বোঝায় $a : b = b : c$

  a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হবে যদি এবং কেবল যদি $b^2 = ac$ হয়। ক্রমিক সমানুপাতের ক্ষেত্রে সবগুলো রাশি এক জাতীয় হতে হবে।

- **অনুপাতের রূপান্তর**

  এখানে অনুপাতের রাশিগুলো ধনাত্মক সংখ্যা।

  (১) $a : b = c : d$ হলে, $b : a = d : c$ [ব্যস্তকরণ *(invertendo)*]

  (২) $a : b = c : d$ হলে, $a : c = b : d$ [একান্তকরণ *(alternendo)*]

  (৩) $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ [যোজন *(componendo)*]

  (৪) $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ [বিয়োজন *(dividendo)*]

  (৫) $a : b = c : d$ হলে, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ [যোজন-বিয়োজন *(componendo-dividendo)*]

  (৬) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$ হলে, প্রত্যেকটি অনুপাত $= \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন ॥ ১ ॥ দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার এবং b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

সমাধান : ১ম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার

∴ ১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গমিটার

এবং ২য় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = b মিটার

∴ ২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = b^2 বর্গমিটার

∴ ১ম ও ২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত = $\frac{a^2}{b^2} = a^2 : b^2$

∴ তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত = $a^2 : b^2$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ২ ॥ একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, বৃত্তক্ষেত্রের ব্যাসার্ধ = r মিটার

∴ বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গমিটার

∴ বৃত্তের পরিসীমা = $2\pi r$ মিটার

প্রশ্নমতে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ মিটার

∴ বর্গক্ষেত্রের এক বাহু = $\sqrt{\pi r^2}$ মিটার = $\sqrt{\pi} r$ মিটার

∴ বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $4\sqrt{\pi} r$ মিটার

বৃত্তক্ষেত্রের ও বর্গক্ষেত্রের পরিসীমার অনুপাত

$$= \frac{2\pi r}{4\sqrt{\pi} r} \qquad = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} : 2 \textbf{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ॥ ৩ ॥ দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং তাদের ল. সা. গু. 180; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান : ধরি, সংখ্যাদ্বয় 3x ও 4x [অনুপাত অনুযায়ী)]

∴ সংখ্যাদ্বয়ের ল. সা. গু. = 12x

প্রশ্নমতে, 12x = 180

বা, $x = \frac{180}{12}$

∴ x = 15

∴ সংখ্যাদ্বয় যথাক্রমে $(3 \times 15) = 45$

এবং $(4 \times 15) = 60$

নির্ণেয় সংখ্যা দুইটি 45 ও 60.

প্রশ্ন ॥ ৪ ॥ একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্র সংখ্যার অনুপাত 1 : 4, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যাকে মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।

সমাধান : মনে করি, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = x

এবং উপস্থিত ছাত্র সংখ্যা = 4x

∴ মোট ছাত্র সংখ্যা = (4x + x) জন = 5x জন

∴ অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার $\frac{x}{5x}$ অংশ

অর্থাৎ $\frac{\text{অনুপস্থিত ছাত্র}}{\text{মোট ছাত্র}} \times 100\% = \frac{x}{5x} \times 100\% = \left(\frac{1}{5} \times 100\right)\% = 20\%$

∴ অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার 20%. **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৫ ॥ একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : ক্রয়মূল্য 100 টাকা হলে 28% ক্ষতিতে বিক্রয়মূল্য = (100 – 28) বা 72 টাকা।

বিক্রয়মূল্য : ক্রয়মূল্য = 72 : 100 = $\frac{72}{100}$

$= \frac{18}{25} = 18 : 25$

∴ বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত = 18 : 25. **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৬ ॥ পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল 5 : 2। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান : মনে করি, 7 বছর পূর্বে পিতার বয়স ছিল 5k বছর

এবং 7 বছর পূর্বে পুত্রের বয়স ছিল 2k বছর

এখানে, k অনুপাতের সাধারণ গুণিতক

∴ বর্তমানে পিতার বয়স (5k + 7) বছর

এবং বর্তমানে পুত্রের বয়স (2k + 7) বছর

আবার, 5 বছর পরে পিতার বয়স (5k + 7 + 5) বছর

= (5k + 12) বছর

এবং 5 বছর পরে পুত্রের বয়স (2k + 7 + 5) বছর

= (2k + 12) বছর

প্রশ্নানুসারে, (5k + 7) + (2k + 7) = 70

বা, 5k + 7 + 2k + 7 = 70

বা, 7k + 14 = 70

বা, 7k = 70 – 14 = 56

বা, $k = \frac{56}{7} = 8$

∴ k = 8

∴ 5 বছর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত

= (5 × 8 + 12) : (2 × 8 + 12)

= (40 + 12) : (16 + 12)

= 52 : 28

= 13 : 7 **(Ans.)**

প্রশ্ন ॥ ৭ ॥ যদি a : b = b : c হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$ **(ii)** $a^2 b^2 c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$

(iii) $\frac{abc\,(a + b + c)^3}{(ab + bc + ca)^3} = 1$ **(iv)** $a - 2b + c = \frac{(a - b)^2}{a} = \frac{(b - c)^2}{c}$

সমাধান : (i) দেওয়া আছে a : b = b : c,

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore\ b^2 = ac$

বামপক্ষ $= \frac{a}{c}$

ডানপক্ষ $= \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ac}{ac + c^2}$ [$\because\ b^2 = ac$]

$= \frac{a\,(a + c)}{c\,(a + c)} = \frac{a}{c}$

অর্থাৎ, $\frac{a}{c} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$ **(প্রমাণিত)**

(ii) দেওয়া আছে, $a : b = b : c$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore\ b^2 = ac$

বামপক্ষ $= a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right)$

$= \frac{a^2b^2c^2}{a^3} + \frac{a^2b^2c^2}{b^3} + \frac{a^2b^2c^2}{c^3}$

$= \frac{b^2c^2}{a} + \frac{a^2c^2}{b} + \frac{a^2b^2}{c}$

$= \frac{ac.\,c^2}{a} + \frac{(b^2)^2}{b} + \frac{a^2.ac}{c}$ [$\because\ b^2 = ac$]

$= \frac{ac^3}{a} + \frac{b^4}{b} + \frac{a^3c}{c}$

$= c^3 + b^3 + a^3$

$= a^3 + b^3 + c^3$ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$ **(প্রমাণিত)**

(iii) দেওয়া আছে $a : b = b : c$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore\ b^2 = ac$

বামপক্ষ $= \frac{abc\,(a + b + c)^3}{(ab + bc + ca)^3}$

$= \frac{b.\,b^2\,(a + b + c)^3}{(ab + bc + b^2)^3}$ [$\because\ b^2 = ac$]

$$= \frac{b^3(a+b+c)^3}{\{b(a+c+b)\}^3} = \frac{b^3(a+b+c)^3}{b^3(a+b+c)^3}$$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$ **(প্রমাণিত)**

(iv) দেওয়া আছে, $a : b = b : c$

বা, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

$\therefore b^2 = ac$

১ম পক্ষ $= a - 2b + c$

২য় পক্ষ $= \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a}$

$= \frac{a^2 - 2ab + ac}{a}$ [$\because b^2 = ac$]

$= \frac{a(a-2b+c)}{a} = a - 2b + c$

৩য় পক্ষ $= \frac{(b-c)^2}{c} = \frac{b^2 - 2bc + c^2}{c}$

$= \frac{ac - 2bc + c^2}{c}$ [$\because b^2 = ac$]

$= \frac{c(a-2b+c)}{c} = a - 2b + c$

অর্থাৎ, $a - 2b + c = \frac{(a-b)^2}{a} = \frac{(b-c)^2}{c}$ **(প্রমাণিত)**

পশ্ন ॥ ৮ ॥ সমাধান কর :

(i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$ **(ii)** $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$

(iii) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$, $2a > b > 0$ এবং $x \neq 0$.

(iv) $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}} = 5$ **(v)** $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}} = c$

(vi) $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

সমাধান : (i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}} = \frac{1+3}{1-3}$ [যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2\left(\sqrt{1-x}\right)} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$ [– 1 দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]

বা, $2\sqrt{1-x} = 1$ [আড়গুণন করে]

বা, $\left(2\sqrt{1-x}\right)^2 = (1)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4(1-x) = 1$

বা, $4 - 4x = 1$

বা, $-4x = 1 - 4$

বা, $-4x = -3$

$\therefore x = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{3}{4}$

(ii) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$

বা, $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}+\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}-\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$

বা, $\left(\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}\right)^2 = \left(\frac{b+1}{b-1}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{a+x}{a-x} = \frac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1}$

বা, $\frac{a+x+a-x}{a+x-a+x} = \frac{b^2+2b+1+b^2-2b+1}{b^2+2b+1-b^2+2b-1}$

[পুনরায় যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a}{2x} = \frac{2b^2+2}{4b}$

বা, $\frac{a}{x} = \frac{2(b^2+1)}{4b}$

বা, $\frac{a}{x} = \frac{b^2+1}{2b}$

বা, $x(b^2 + 1) = 2ab$

$\therefore x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{2ab}{b^2 + 1}$

(iii) $\frac{a + x - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + x + \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{x}$

বা, $\frac{a + x - \sqrt{a^2 - x^2} + a + x + \sqrt{a^2 - x^2}}{a + x - \sqrt{a^2 - x^2} - a - x - \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b + x}{b - x}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a + 2x}{-2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b + x}{b - x}$

বা, $\frac{2(a + x)}{-2\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b + x}{b - x}$

বা, $\frac{a + x}{-\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b + x}{b - x}$

বা, $\frac{(a + x)^2}{(-\sqrt{a^2 - x^2})^2} = \frac{(b + x)^2}{(b - x)^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{a^2 + 2ax + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2 + 2bx + x^2}{b^2 - 2bx + b^2}$

বা, $\frac{a^2 + 2ax + x^2 + a^2 - x^2}{a^2 + 2ax + x^2 - a^2 + x^2} = \frac{b^2 + 2bx + x^2 + b^2 - 2bx + x^2}{b^2 + 2bx + x^2 - b^2 + 2bx - x^2}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a^2 + 2ax}{2ax + 2x^2} = \frac{2b^2 + 2x^2}{4bx}$

বা, $\frac{2(a^2 + ax)}{2(x^2 + ax)} = \frac{2(x^2 + b^2)}{2 \times 2bx}$

বা, $\frac{a^2 + ax}{x^2 + ax} = \frac{x^2 + b^2}{2bx}$

বা, $(x^2 + b^2)(x^2 + ax) = 2bx(a^2 + ax)$ [আড়গুণন করে]

বা, $x(x^2 + b^2)(x + a) = 2abx(x + a)$

বা, $x^2 + b^2 = 2ab$ [উভয়পক্ষকে $x(x + a)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^2 = 2ab - b^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{2ab - b^2}$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \pm\sqrt{2ab - b^2}$

(iv) $\frac{\sqrt{x - 1} + \sqrt{x - 6}}{\sqrt{x - 1} - \sqrt{x - 6}} = 5$

বা, $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}+\sqrt{x-1}-\sqrt{x-6}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}-\sqrt{x-1}+\sqrt{x-6}}=\frac{5+1}{5-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-6}}=\frac{6}{4}$

বা, $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-6}}=\frac{3}{2}$

বা, $\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-6}}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{x-1}{x-6}=\frac{9}{4}$

বা, $9x-54=4x-4$ [আড়গুণন করে]

বা, $9x-4x=54-4$

বা, $5x=50$

বা, $x=\frac{50}{5}$

$\therefore x=10$

নির্ণেয় সমাধান, $x=10$

(v) $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}}=c$

বা, $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}+\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax-b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}-\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax-b}}=\frac{c+1}{c-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\sqrt{ax+b}}{2\sqrt{ax-b}}=\frac{c+1}{c-1}$

বা, $\left(\frac{\sqrt{ax+b}}{\sqrt{ax-b}}\right)^2=\left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{ax+b}{ax-b}=\frac{c^2+2c+1}{c^2-2c+1}$

বা, $\frac{ax+b+ax-b}{ax+b-ax+b}=\frac{c^2+2c+1+c^2-2c+1}{c^2+2c+1-c^2+2c-1}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2ax}{2b}=\frac{2c^2+2}{4c}$

বা, $\frac{ax}{b}=\frac{2(c^2+1)}{2\cdot 2c}$

বা, $\frac{ax}{b} = \frac{c^2+1}{2c}$

বা, $x = \frac{c^2+1}{2c} \times \frac{b}{a}$

বা, $x = \frac{b(c^2+1)}{2ac}$

বা, $x = \frac{b}{2a}\left(\frac{c^2+1}{c}\right)$

$\therefore x = \frac{b}{2a}\left(c+\frac{1}{c}\right)$

নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{b}{2a}\left(c+\frac{1}{c}\right)$

(vi) $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

বা, $81 = \frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$ $\left[\frac{(1-x)^3}{(1+x)^3}\right.$ দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে$\left.\right]$

বা, $\left\{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)2\right\}2 = (9)^2$

বা, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = \pm 9$ [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]

বা, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 9$ অথবা, -9

বা, $\frac{1+x}{1-x} = \pm\sqrt{9}$ অথবা, $\pm\sqrt{-9}$

কিন্তু, $\frac{1+x}{1-x} = \pm\sqrt{-9}$ সমীকরণটির কোনো বাস্তব সংখ্যায় সমাধান নেই।

$\therefore \frac{1+x}{1-x} = \pm 3$

$\therefore$ হয় $\frac{1+x}{1-x} = 3$ অথবা, $\frac{1+x}{1-x} = -3$

বা, $1 + x = 3 - 3x$ বা, $-3 + 3x = 1 + x$

বা, $x + 3x = 3 - 1$ বা, $3x - x = 1 + 3$

বা, $4x = 2$ বা, $2x = 4$

বা, $x = \frac{2}{4}$ বা, $x = \frac{4}{2}$

$\therefore x = \frac{1}{2}$ $\therefore x = 2$

নির্ণেয় সমাধান, $x = 2$ বা, $\frac{1}{2}$

প্রশ্ন ॥ ৯ ॥ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে,

(i) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = \frac{c^2 + cd + d^2}{c^2 - cd + d^2}$ (ii) $\frac{ac + bd}{ac - bd} = \frac{c^2 + d^2}{c^2 - d^2}$

সমাধান : (i) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore \frac{a}{b} = k$ বা, $a = bk$

এবং $\frac{c}{d} = k$ বা, $c = dk$

বামপক্ষ $= \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = \frac{(bk)^2 + bk.b + b^2}{(bk)^2 - bk.b + b^2}$ [$\because a = bk$]

$= \frac{b^2k^2 + b^2k + b^2}{b^2k^2 - b^2k + b^2} = \frac{b^2(k^2 + k + 1)}{b^2(k^2 - k + 1)} = \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$

ডানপক্ষ $= \frac{c^2 + cd + d^2}{c^2 - cd + d^2} = \frac{(dk)^2 + dk.d + d^2}{(dk)^2 - dk.d + d^2}$ [$\because c = dk$]

$= \frac{d^2k^2 + d^2k + d^2}{d^2k^2 - d^2k + d^2} = \frac{d^2(k^2 + k + 1)}{d^2(k^2 - k + 1)} = \frac{k^2 + k + 1}{k^2 - k + 1}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = \frac{c^2 + cd + d^2}{c^2 - cd + d^2}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore \frac{a}{b} = k$ এবং $\frac{c}{d} = k$

বা, $a = bk$ বা, $c = dk$

বামপক্ষ $= \frac{ac + bd}{ac - bd} = \frac{bk.dk + bd}{bk.dk - bd}$ [$\because a = bk$ এবং $c = dk$]

$= \frac{bdk^2 + bd}{bdk^2 - bd} = \frac{bd(k^2 + 1)}{bd(k^2 - 1)}$

$= \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$

ডানপক্ষ $= \frac{c^2 + d^2}{c^2 - d^2} = \frac{(dk)^2 + d^2}{(dk)^2 - d^2}$ [$\because c = dk$]

$= \frac{d^2k^2 + d^2}{d^2k^2 - d^2} = \frac{d^2(k^2 + 1)}{d^2(k^2 - 1)}$

$= \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{ac + bd}{ac - bd} = \frac{c^2 + d^2}{c^2 - d^2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১০ ॥ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ **হলে, দেখাও যে,**

(i) $\frac{a^3 + b^3}{b^3 + c^3} = \frac{b^3 + c^3}{c^3 + d^3}$ **(ii)** $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

সমাধান : (i) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore c = dk,$

$b = ck = dk.k = dk^2$

এবং $a = bk = dk^2.k = dk^3$

বামপক্ষ $= \frac{a^3 + b^3}{b^3 + c^3} = \frac{(dk^3)^3 + (dk^2)^3}{(dk^2)^3 + (dk)^3}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{d^3k^9 + d^3k^6}{d^3k^6 + d^3k^3} = \frac{d^3k^6(k^3 + 1)}{d^3k^3(k^3 + 1)} = k^3$

ডানপক্ষ $= \frac{b^3 + c^3}{c^3 + d^3} = \frac{(dk^2)^3 + (dk)^3}{(dk)^3 + d^3}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{d^3k^6 + d^3k^3}{d^3k^3 + d^3} = \frac{d^3k^3(k^3 + 1)}{d^3(k^3 + 1)} = k^3$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{a^3 + b^3}{b^3 + c^3} = \frac{b^3 + c^3}{c^3 + d^3}$ **(দেখানো হলো)**

(ii) ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

$\therefore c = dk, b = ck = dk.k = dk^2$

এবং $a = bk = dk^2 . k = dk^3$

বামপক্ষ $= (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$

$= \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\}\{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$

[a, b ও c এর মান বসিয়ে]

$= (d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2)(d^2k^4 + d^2k^2 + d^2)$

$= d^2k^2(k^4 + k^2 + 1) \times d^2(k^4 + k^2 + 1)$

$= d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

ডানপক্ষ $= (ab + bc + cd)^2$

$= (dk^3 \cdot dk^2 + dk^2 \cdot dk + dk \cdot d)^2$ [মান বসিয়ে]

$= (d^2k^5 + d^2k^3 + d^2k)^2 = \{d^2k(k^4 + k^2 + 1)\}^2$

$= d^4k^2(k^4 + k^2 + 1)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১১ ॥ $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2, a \neq b.$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = \frac{4ab}{a+b}$

$\therefore \frac{x}{2a} = \frac{4ab}{2a(a+b)}$ [উভয়পক্ষকে 2a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{3b+a}{b-a}$

আবার, $\frac{x}{2b} = \frac{4ab}{2b(a+b)}$

বা, $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b}$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b} = \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$

$= \frac{3b+a-3a-b}{b-a} = \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১২ ॥ $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ হলে,
প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} + \sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} - \sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}\right)^3$$ [উভয়পক্ষকে ঘন করে]

$$\text{বা, } \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{m+1}{m-1}$$

$$\text{বা, } \frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1} = \frac{m+1+m-1}{m+1-m+1}$$

[যোজন-বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{2x^3+6x}{6x^2+2} = \frac{2m}{2}$$

$$\text{বা, } \frac{2(x^3+3x)}{2(3x^2+1)} = m$$

$$\text{বা, } \frac{x^3+3x}{3x^2+1} = m$$

$$\text{বা, } x^3+3x = 3mx^2+m$$ [আড়গুণন করে]

$$\therefore x^3-3mx^2+3x-m = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্ন ॥ ১৩ ॥ $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে,

দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b = 0$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}+\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}-\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}$$

[যোজন–বিয়োজন করে]

$$\text{বা, } \frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2a+3b}}{\sqrt{2a-3b}}\right)^2$$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$$\text{বা, } \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$$

$$\text{বা, } \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{2a+3b}{2a-3b}$$

বা, $\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1} = \frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$

[যোজন–বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^2+2}{4x} = \frac{4a}{6b}$

বা, $\frac{2(x^2+1)}{2\times 2x} = \frac{2a}{3b}$

বা, $\frac{x^2+1}{2x} = \frac{2a}{3b}$

বা, $3bx^2 + 3b = 4ax$ [আড়গুণন করে]

$\therefore 3bx^2 - 4ax + 3b = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ১৪ ॥ $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$

বা, $\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ [একান্তরকরণ করে]

বা, $\frac{b^2+2bc+c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}$

বা, $\frac{b^2+2bc+c^2-b^2-c^2}{b^2+c^2} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}$

[বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2bc}{b^2+c^2} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$

বা, $\frac{c}{b^2+c^2} = \frac{a}{a^2+b^2}$ [2b দ্বারা উভয়পক্ষকে ভাগ করে]

বা, $ab^2 + ac^2 = a^2c + b^2c$ [আড়গুণন করে]

বা, $ab^2 - b^2c = a^2c - ac^2$

বা, $b^2(a-c) = ac(a-c)$

বা, $b^2 = ac$ [উভয়পক্ষকে $(a-c)$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

অর্থাৎ, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৫ ॥ $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ হলে,

প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x} = \frac{b}{z+x-y} = \frac{c}{x+y-z}$

সমাধান : মনে করি,

$$\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} = k$$

$\therefore x = k(b + c), y = k(c + a)$ এবং $z = k(a + b)$

১ম পক্ষ $= \dfrac{a}{y + z - x}$

$= \dfrac{a}{k(c + a) + k(a + b) - k(b + c)}$ [মান বসিয়ে]

$= \dfrac{a}{k(c + a + a + b - b - c)} = \dfrac{a}{k.2a} = \dfrac{1}{2k}$

২য় পক্ষ $= \dfrac{b}{z + x - y}$

$= \dfrac{b}{k(a + b) + k(b + c) - k(c + a)}$ [মান বসিয়ে]

$= \dfrac{b}{k(a + b + b + c - c - a)} = \dfrac{b}{k.2b} = \dfrac{1}{2k}$

৩য় পক্ষ $= \dfrac{c}{x + y - z}$

$= \dfrac{c}{k(b + c) + k(c + a) - k(a + b)}$ [মান বসিয়ে]

$= \dfrac{c}{k(b + c + c + a - a - b)}$

$= \dfrac{c}{k.2c} = \dfrac{1}{2k}$

$\therefore$ ১ম পক্ষ = ২য় পক্ষ = ৩য় পক্ষ

অর্থাৎ, $\dfrac{a}{y + z - x} = \dfrac{b}{z + x - y} = \dfrac{c}{x + y - z}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৬ ॥ $\dfrac{bz - cy}{a} = \dfrac{cx - az}{b} = \dfrac{ay - bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$

সমাধান : মনে করি,

$\dfrac{bz - cy}{a} = \dfrac{cx - az}{b} = \dfrac{ay - bx}{c} = k$

$\therefore \dfrac{bz - cy}{a} = k$

বা, $bz - cy = ak$ ..... (i)

আবার, $\dfrac{cx - az}{b} = k$

বা, $cx - az = bk$ ..... (ii)

এবং $\dfrac{ay - bx}{c} = k$

বা, $ay - bx = ck$ .....(iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) কে যথাক্রমে x, y ও z দ্বারা গুণ করে যোগ করি,

$bxz - cxy + cxy - ayz + ayz - bxz$

$= akx + bky + ckz$

বা, $0 = k(ax + by + cz)$

$\therefore k = 0$

সমীকরণ (i)–এ $k = 0$ বসিয়ে পাই,

$bz - cy = a.\ 0$

বা, $bz - cy = 0$

বা, $bz = cy$

$\therefore \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ..... (iv)

সমীকরণ (ii)–এ $k = 0$ বসিয়ে পাই,

$cx - az = b.\ 0$

বা, $cx - az = 0$

বা, $cx = az$

$\therefore \frac{x}{a} = \frac{z}{c}$ ..... (v)

সমীকরণ (iv) ও (v) থেকে পাই,

$\frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x}{a}$ অর্থাৎ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ১৭ ॥ $\frac{\mathbf{a+b-c}}{\mathbf{a+b}} = \frac{\mathbf{b+c-a}}{\mathbf{b+c}} = \frac{\mathbf{c+a-b}}{\mathbf{c+a}}$ **এবং** $\mathbf{a+b+c \neq 0}$ **হলে, প্রমাণ কর যে,** $\mathbf{a = b = c}$.

সমাধান : দেওয়া আছে,

$$\frac{a+b-c}{a+b} = \frac{b+c-a}{b+c} = \frac{c+a-b}{c+a}$$

বা, $\frac{a+b-c-a-b}{a+b} = \frac{b+c-a-b-c}{b+c} = \frac{c+a-b-c-a}{c+a}$

[বিয়োজন করে]

বা, $\frac{-c}{a+b} = \frac{-a}{b+c} = \frac{-b}{c+a}$

বা, $\frac{c}{a+b} = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{c+a}$ [প্রত্যেক পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{a+b+c}{c} = \frac{b+c+a}{a} = \frac{c+a+b}{b}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ $[\because a+b+c \neq 0]$

[প্রত্যেক পক্ষকে $a + b + c$ দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \frac{1}{c} = \frac{1}{a}$ হলে, $a = c$ এবং $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ হলে, $a = b$

অর্থাৎ, $a = b = c$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন ॥ ১৮ ॥ $\frac{x}{xa + yb + zc} = \frac{y}{ya + zb + xc} = \frac{z}{za + xb + yc}$ এবং $x + y + z \neq 0$ হলে, দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাত $= \frac{1}{a + b + c}$

সমাধান : মনে করি, প্রদত্ত প্রত্যেকটি অনুপাতের মান $= k$

$\therefore \frac{x}{xa + yb + zc} = k$

বা, $k(xa + yb + zc) = x$ ..... (i)

আবার, $\frac{y}{ya + zb + xc} = k$

বা, $k(ya + zb + xc) = y$ ..... (ii)

এবং $\frac{z}{za + xb + yc} = k$

বা, $k(za + xb + yc) = z$ ..... (iii)

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$k(xa + by + zc + ya + zb + xc + za + xb + yc) = x + y + z$

বা, $k(xa + ya + za + xb + yb + zb + xc + yc + zc) = x + y + z$

বা, $k\{a(x + y + z) + b(x + y + z) + c(x + y + z)\} = x + y + z$

বা, $k(x + y + z)(a + b + c) = x + y + z$

বা, $k = \frac{(x + y + z)}{(x + y + z)(a + b + c)}$

$\therefore k = \frac{1}{a + b + c}$

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান $= \frac{1}{a + b + c}$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ॥ ১৯ ॥ যদি $(a + b + c)p = (b + c - a)q = (c + a - b)r = (a + b - c)s$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$.

সমাধান : মনে করি,

$(a + b + c)p = (b + c - a)q = (c + a - b)r$
$= (a + b - c)s = k$

$\therefore (a + b + c)p = k$

বা, $\frac{1}{p} = \frac{a + b + c}{k}$ ... ... (i)

আবার, $q(b + c - a) = k$

বা, $\frac{1}{q} = \frac{b + c - a}{k}$ ... ... (ii)

অনুরূপভাবে, $(c + a - b)\, r = k$

বা, $\frac{1}{r} = \frac{c + a - b}{k}$ ... ... (iii)

এবং $s(a + b - c) = k$

বা, $\frac{1}{s} = \frac{a + b - c}{k}$ ... ... (iv)

বামপক্ষ $= \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$

$= \frac{b + c - a}{k} + \frac{c + a - b}{k} + \frac{a + b - c}{k}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{b + c - a + c + a - b + a + b - c}{k}$

$= \frac{a + b + c}{k} = \frac{1}{p}$ = ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{p}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ॥ ২০ ॥ যদি $lx = my = nz$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$$

সমাধান : দেওয়া আছে, $lx = my = nz$

∴ $lx = my$ ∴ $my = nz$ ∴ $lx = nz$

বা, $\frac{x}{y} = \frac{m}{l}$ বা, $\frac{y}{z} = \frac{n}{m}$ বা, $\frac{x}{z} = \frac{n}{l}$

বা, $\frac{y}{x} = \frac{l}{m}$ বা, $\frac{z}{y} = \frac{m}{n}$ বা, $\frac{z}{x} = \frac{l}{n}$

বামপক্ষ $= \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$

$= \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{z} + \frac{y}{x} \cdot \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \cdot \frac{z}{y}$

$= \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{l} + \frac{l}{m} \cdot \frac{n}{m} + \frac{l}{n} \cdot \frac{m}{n}$ [মান বসিয়ে]

$= \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$ = ডানপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} = \frac{mn}{l^2} + \frac{nl}{m^2} + \frac{lm}{n^2}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ॥ ২১ ॥ যদি $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a + q}}{\sqrt{a - q}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p + q}{a} = \frac{p - q}{q}$.

সমাধান : দেওয়া আছে, $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

এখানে, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

বা, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}\right)2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{(\sqrt{a+q})^2}{(\sqrt{a-q})^2}$

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a+q}{a-q}$

বা, $\frac{p}{q} = \frac{a+q}{a-q}$ [□ $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ দেওয়া আছে]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a+q+a-q}{a+q-a+q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{2a}{2q} = \frac{a}{q}$

বা, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ [একান্তরকরণ করে]

$\therefore \frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ **(দেখানো হলো)**