ডাচ বাংলা ব্যাংক-প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৮
জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

হায়ার সেকেন্ডারি ক্যাটাগরি
সময়: ৪ ঘন্টা

1. সমাধান করো

$$x^2(2-x)^2 = 1 + 2(1-x)^2$$

যেনো x বাস্তব সংখ্যা হয়।

Find solutions of the following equation that are real numbers,

$$x^2(2-x)^2 = 1 + 2(1-x)^2$$

.

2. AB একটি বৃত্তের ব্যাস। বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক AD ও BC এমন ভাবে আঁকা হলো যেনো AC ও BD একে অপরকে বৃত্তের ওপর একটি বিন্দুতে ছেদ করে। যদি, $AD = a$, $BC = b$ এবং $a \neq b$ হয়, তাহলে ব্যাস AB কি হবে?
AB is the diameter of a circle. Tangents AD and BC are drawn so that AC and BD intersect at a point on the circle. Suppose $AD = a$ and $BC = b$, and $a \neq b$. What is the diameter AB?

3. ঊর্মি চারটি লুডুর সুষম/fair ছক্কা নিক্ষেপ করলো কিন্তু ফলাফল দেখলো না। তার বন্ধু ঈপ্সিতা তাকে বললো যে ছক্কার ফলাফলে আসা সংখ্যাগুলোর গুনফল ১৪৪। সে আরো বললো যে, সংখ্যাগুলোর যোগফল, S এমন একটি সংখ্যা যেন, $14 \leq S \leq 18$। ঊর্মি ঈপ্সিতাকে বললো, যদি গুনফল ১৪৪ হয় তবে, $\{14, 15, 16, 17, 18\}$ সেটটিতে এমন একটি সংখ্যা আছে যা S হওয়া অসম্ভব। $\{14, 15, 16, 17, 18\}$ রেঞ্জের কোনটি সেই অসম্ভব সংখ্যা?
Urmi rolls four fair six-sided dice. She doesn't see the results. Her friend Ipshita tells her that the product of the numbers is 144. Ipshita also says the sum of the dice, S satisfies $14 \leq S \leq 18$. Urmi tells Ipshita that S cannot be one of the numbers in the set $\{14, 15, 16, 17, 18\}$ if the product is 144. Which number in the range $\{14, 15, 16, 17, 18\}$ is an impossible value for S?

4. সাব্বির গুনে দেখলো, একই তলে, ঠিক 200টি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে এরকম সর্বনিম্ন m সংখ্যক রেখা আঁকা যায়। m এর মান কত?
Sabbir is counting the minimum number of lines m, that can be drawn on the plane so that they intersect in exactly 200 distinct points. What is m?

5. $ABCD$ চতুর্ভূজের বাহুগুলিকে ব্যাস ধরে চারটি বৃত্ত আঁকা হলো। A বিন্দুগামী বৃত্ত দুটি আবার A' বিন্দুতে ছেদ করে। B বিন্দুগামী বৃত্ত দুটি আবার B' বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দুগামী বৃত্ত দুটি আবার C' বিন্দুতে ছেদ করে। D বিন্দুগামী বৃত্ত দুটি আবার D' বিন্দুতে ছেদ করে। ধরে নেই, A', B', C', D' চারটি ভিন্ন বিন্দু। $A'B'C'D'$ চতুর্ভূজটি কি $ABCD$ চতুর্ভূজের সদৃশ হবে? প্রমাণ করো।
Four circles are drawn with the sides of quadrilateral $ABCD$ as diameters. The two circles passing through A meet again at A'. The two circles passing through B meet again at B'. The two circles passing through C meet again at C'. The two circles passing through D meet again at D'. Suppose, A', B', C', D' are all distinct. Is the quadrilateral $A'B'C'D'$ similar to $ABCD$? Show with proof.

6. পূর্ণ সংখ্যার সকল যুগল (m, n) নির্ণয় করো যেন

$$3(m^2 + n^2) - 7(m + n) = -4$$

Find all pairs of integers (m, n) satisfying the equality

$$3(m^2 + n^2) - 7(m + n) = -4$$

7. নির্ণয় করো

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x + \sin x \cos^3 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^3 x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin x \cos^3 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^3 x \cos x} dx$$

Evaluate

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^4 x + \sin x \cos^3 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^3 x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin x \cos^3 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^3 x \cos x} dx$$

8. একটি n সংখ্যক খেলোয়াড়ের টুর্নামেন্টে প্রতি ২ জন খেলোয়াড় একে অপরের সাথে ঠিক একবার করে খেলে এবং খেলায় কোন ড্র হয় না। একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k-কে n-good বলা হবে যদি এমন একটি n সংখ্যক খেলোয়াড়ের টুর্নামেন্ট থাকে যেখানে যেকোন k সংখ্যক খেলোয়াড়ের জন্য এমন আরেকজন খেলোয়াড় থাকে যে ঐ k সংখ্যক খেলোয়াড়ের প্রত্যেকের বিপক্ষেই জয়ী হয়।

   (i) প্রমাণ কর k যদি n-good হয় তাহলে $n \geq 2^{k+1} - 1$।

   (ii) এমন সকল n বের কর যেন 2 একটি n-good সংখ্যা।

   In a tournament of n players, every pair of players play exactly one match and there is no draw. A positive integer k is called n-good if there exists a tournament of n players in which for any k number of players, there is at least one player other than the k players who beats all of them.

   (i) Prove that if k is n-good then $n \geq 2^{k+1} - 1$.

   (ii) Find all n so that 2 is n-good

ডাচ বাংলা ব্যাংক-প্রথম আলো গণিত উৎসব ২০১৮
জাতীয় গণিত অলিম্পিয়াড
আয়োজক: বাংলাদেশ গণিত অলিম্পিয়াড কমিটি

সেকেন্ডারি ক্যাটাগরি
সময়: ৪ ঘন্টা

1. সমাধান করো
$$x^2(2-x)^2 = 1 + 2(1-x)^2$$
যেনো x বাস্তব সংখ্যা হয়।
Find solutions of the following equation that are real numbers,
$$x^2(2-x)^2 = 1 + 2(1-x)^2$$
.

2. AB একটি বৃত্তের ব্যাস। বৃত্তটির দুইটি স্পর্শক AD ও BC এমন ভাবে আঁকা হলো যেনো AC ও BD একে অপরকে বৃত্তের ওপর একটি বিন্দুতে ছেদ করে। যদি, $AD = a$, $BC = b$ এবং $a \neq b$ হয়, তাহলে ব্যাস AB কি হবে?
AB is the diameter of a circle. Tangents AD and BC are drawn so that AC and BD intersect at a point on the circle. Suppose $AD = a$ and $BC = b$, and $a \neq b$. What is the diameter AB?

3. ঊর্মি চারটি লুডুর সুষম/fair ছক্কা নিক্ষেপ করলো কিন্তু ফলাফল দেখলো না। তার বন্ধু ঈপ্সিতা তাকে বললো যে ছক্কার ফলাফলে আসা সংখ্যাগুলোর গুনফল ১৪৪। সে আরো বললো যে, সংখ্যাগুলোর যোগফল, S এমন সংখ্যা যেন, $14 \leq S \leq 18$। ঊর্মি ঈপ্সিতাকে বললো, যদি গুনফল ১৪৪ হয় তবে, $\{14, 15, 16, 17, 18\}$ সেটটিতে এমন একটি সংখ্যা আছে যা S হওয়া অসম্ভব। $\{14, 15, 16, 17, 18\}$ রেঞ্জের কোনটি সেই অসম্ভব সংখ্যা?
Urmi rolls four fair six-sided dice. She doesn't see the results. Her friend Ipshita tells her that the product of the numbers is 144. Ipshita also says the sum of the dice, S satisfies $14 \leq S \leq 18$. Urmi tells Ipshita that S cannot be one of the numbers in the set $\{14, 15, 16, 17, 18\}$ if the product is 144. Which number in the range $\{14, 15, 16, 17, 18\}$ is an impossible value for S?

4. সাব্বির গুনে দেখলো, একই তলে, ঠিক 200টি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে এরকম সর্বনিম্ন m সংখ্যক রেখা আঁকা যায়। m এর মান কত?
Sabbir is counting the minimum number of lines m, that can be drawn on the plane so that they intersect in exactly 200 distinct points. What is m?

5. $ABCD$ চতুর্ভূজের বাহুগুলিকে ব্যাস ধরে চারটি বৃত্ত আঁকা হলো। A বিন্দুগামী বৃত্ত দুটি আবার A' বিন্দুতে ছেদ করে। B বিন্দুগামী বৃত্ত দুটি আবার B' বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দুগামী বৃত্ত দুটি আবার C' বিন্দুতে ছেদ করে। D বিন্দুগামী বৃত্ত দুটি আবার D' বিন্দুতে ছেদ করে। ধরে নেই, A', B', C', D' চারটি ভিন্ন বিন্দু। $A'B'C'D'$ চতুর্ভুজটি কি $ABCD$ চতুর্ভুজের সদৃশ হবে? প্রমাণ করো।
Four circles are drawn with the sides of quadrilateral $ABCD$ as diameters. The two circles passing through A meet again at A'. The two circles passing through B meet again at B'. The two circles passing through C meet again at C'. The two circles passing through D meet again at D'. Suppose, A', B', C', D' are all distinct. Is the quadrilateral $A'B'C'D'$ similar to $ABCD$? Show with proof.

6. পূর্ণ সংখ্যার সকল যুগল (m, n) নির্ণয় করো যেন
$$3(m^2 + n^2) - 7(m + n) = -4$$
Find all pairs of integers (m, n) satisfying the equality
$$3(m^2 + n^2) - 7(m + n) = -4$$

7. একটি ৯ বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের প্রতিটি বাহুর উপর ১ থেকে ৯ এর মধ্যকার যেকোন একটি সংখ্যা এমনভাবে বসানো হল যেন ১ থেকে ৯ পর্যন্ত সবগুলো সংখ্যা ঠিক একবার ব্যবহার করা হয় এবং পাশাপাশি যেকোন ৩ টি বাহুর সংখ্যার যোগফল ৩ দ্বারা বিভাজ্য হয়। এরকম সংখ্যার ২টি বিন্যাসকে অভিন্ন ধরা হবে যদি একটিকে শুধুমাত্র ঘূর্ণনের মাধমে অপরটি পাওয়া যায়। সর্বমোট কয়টি অভিন্ন বিন্যাস আছে?
The vertices of a regular nonagon (9-sided polygon) are labeled with the digits 1 through 9 in such a way that the sum of the numbers on every three consecutive vertices is a multiple of 3. Two acceptable arrangements are considered to be indistinguishable if one can be obtained from the other by rotating the nonagon in the plane. Find the number of distinguishable acceptable arrangements.

8. একটি n সংখ্যক খেলোয়াড়ের টুর্নামেন্টে প্রতি ২ জন খেলোয়াড় একে অপরের সাথে ঠিক একবার করে খেলে এবং খেলায় কোন ড্র হয় না। একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা k-কে n-good বলা হবে যদি এমন একটি n সংখ্যক খেলোয়াড়ের টুর্নামেন্ট থাকে যেখানে যেকোন k সংখ্যক খেলোয়াড়ের জন্য এমন আরেকজন খেলোয়াড় থাকে যে ঐ k সংখ্যক খেলোয়াড়ের প্রত্যেকের বিপক্ষেই জয়ী হয়।

   (i) প্রমাণ কর k যদি n-good হয় তাহলে $n \geq 2^{k+1} - 1$।

   (ii) এমন সকল n বের কর যেন 2 একটি n-good সংখ্যা।

   In a tournament of n players, every pair of players play exactly one match and there is no draw. A positive integer k is called n-good if there exists a tournament of n players in which for any k number of players, there is at least one player other than the k players who beats all of them.

   (i) Prove that if k is n-good then $n \geq 2^{k+1} - 1$.

   (ii) Find all n so that 2 is n-good.